¿QUÉ SIGNIFICA DEMOSTRAR?

◈

Sergio Daniel Cardozo

Facultad de Filosofía y Letras - UNT

sergiodaniellog@gmail.com

◈

Resumen

La finalidad de este trabajo es mostrar los aspectos filosóficos más relevantes que se ciernen en torno a la demostración en cuanto método de justificación del conocimiento matemático. Consecuentemente, intento destacar cuáles han sido los momentos más significativos y reveladores en la historia del método de demostración matemática y resaltar sus restricciones: desde Pitágoras al programa formalista de Hilbert y el logicismo de Frege y Russell. Posteriormente, examino las limitaciones de la exigencia de completud del programa formalista relacionadas directamente con el teorema de Incompletitud de Gödel y la disociación entre lo verdadero y demostrable. Seguidamente procuro analizar, en sus aspectos esenciales, la crítica de Lakatos a la teoría euclídea de la demostración en cuanto método exclusivo de las matemáticas y exponer, en contraposición, la postura empirista de este autor sobre las ciencias formales. Finalmente, planteo algunas reflexiones críticas a modo de conclusión, dando cuenta de la dificultad que entraña la reflexión sobre la demostración matemática, entendida como una de las construcciones abstractas más complejas de la cognición humana.

Palabras Clave: Demostración, Método, Matemática, Justificación, Verdad, Formal, Cuasi-empírico.

Abstract

The purpose of this paper is to show the most relevant philosophical aspects that hang around the proof, concerning a method of justification, of mathematical knowledge. Consequently, I try to point out which have been the most significant and revealing moments in the history of the method of mathematical proof and highlight its restrictions: from Pythagoras to the formalist Hilbert`s program and Frege and Russell`s logicism. After that, I examine the limitations of the requirement of completeness of the formalist program directly related to Gödel's incompleteness theorem and dissociation between the true and the provable. Following, I try to analyze, in its essential aspects, Lakatos' criticism to the Euclidean proof theory as unique method of mathematics and present, in contrast, this author`s empiricist stance on formal sciences. Finally, I raise some critical reflections by way of conclusion, expressing facts concerning the realm of the difficulty of reflection on mathematical proof, understood as one of the most complex and abstract constructions of human cognition.

Keywords: Proof, Method, Mathematics, Justification, Truth, Formal, Quasi-empirical.

Introducción

Desde que Pitágoras de Samos (s. VI a.C.) suministró al mundo de las matemáticas una ecuación que tiene el gran potencial de ser verdadera para *todos* los casos de triángulos rectángulos y, en consecuencia, sirve para definir los ángulos rectos y las relaciones que con ello trae aparejadas, los matemáticos adoptaron esta forma de justificar enunciados como la más relevante de sus pruebas, ocupando un lugar de privilegio debido al grado de certeza que proporciona. Es decir, lo que se conoce como El Teorema de Pitágoras sorprende por el hecho de que la sencilla ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ es verdadera sin que ello signifique corroboraciones ulteriores que nos garanticen tal verdad. Es verdadera *a priori*.

Chinos y babilónicos, en el siglo VII a.C., hacían uso del conocimiento que otorga el teorema de Pitágoras con un empirismo primitivo que les permitía resolver problemas prácticos y cotidianos. Sin embargo el rasgo sorprendente que inmortalizó a Pitágoras y los pitagóricos fue el hecho de que su prueba tenía validez universal. Por primera vez se estaba frente a una *demostración* matemática. La importancia de este descubrimiento fue tal para *La Hermandad* de los pitagóricos que, en su tiempo, la consideraron sagrada debido al trascendental desarrollo y estímulo que infundió en las disciplinas que ellos cultivaban.[1]

El método de demostración matemática ha impulsado a los matemáticos en los últimos dos mil quinientos años tras un conocimiento absoluto[2], y ha seducido a todas las demás ciencias por el lugar de privilegio epistemológico alcanzado. De hecho, se habla de demostración en todos los ámbitos del saber y, en muchos de ellos, su uso está determinado por el estatus cognitivo altamente persuasivo que conlleva el término. La demostración matemática brinda un rigor no alcanzado por las demás ciencias y, cuando se utiliza en contextos no matemáticos, se lo hace con el propósito de reforzar hipótesis con diferentes grados de probabilidad, convalidar hechos, fenómenos o enunciados de diferentes disciplinas sin que ello implique que la supuesta demostración deba ajustarse a los cánones de exigencia de las matemáticas.

En lo que sigue, intentaré mostrar cuáles han sido los usos o el alcance semántico del término "demostración", sus características y algunos de los aspectos relevantes de la discusión filosófica que se cierne en torno a su problemática.

Sentido tradicional del término "demostración"

Dentro del campo de las matemáticas, existe un sentido riguroso de demostración que difiere –tal lo expresado anteriormente– del uso cotidiano e informal del término, y es el siguiente: una demostración matemática es una secuencia finita de enunciados. Algunos de ellos son axiomas (enunciados que se consideran válidos al inicio del razonamiento) y otros son consecuencia lógica de estos axiomas, a través del uso de reglas previamente establecidas. La última línea de este encadenamiento es el enunciado que se ha transformado en teorema por el proceso mismo de demostración. En tal sentido, la demostración induce a la verdad del teorema.

Para gran parte de la comunidad de los matemáticos este método de prueba formal es el principal objetivo a alcanzar, puesto que, cuando una proposición ha sido demostrada, se presenta libre de dudas, no sujeta a interpretaciones y verdadera *para siempre*. Este rasgo distingue a las matemáticas de las demás ciencias, aquéllas que basan

---

1 Cfr. Simon Singh. *El último teorema de Fermat*, Buenos Aires: Páprika, 2014, p. 57.

2 Cfr. *Ibíd*., p. 51.

su evidencia en la experimentación y la observación a través del continuo proceso de conjeturas y refutaciones. Wittgenstein afirmaba: "La demostración ha de ser abarcable" significa propiamente no otra cosa que: la demostración no es un experimento. No aceptamos el resultado de una demostración porque ha resultado así una vez, ni porque resulta así a menudo. Sino que vemos en la demostración la razón para decir que *tiene* que resultar así.[3]

Sin duda alguna el ejemplo más resonante sobre una demostración matemática en el siglo XX nos lo proporciona el Teorema de Fermat, que fue publicada por primera vez en Mayo de 1995 en *Annals of Mathematics*. El Teorema de Fermat, considerado uno de los enigmas matemáticos más grandes de la historia fue demostrado por el talentoso profesor de Oxford, Andrew Wiles, 358 años después que el gran Pierre de Fermat observara tajantemente que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones con números enteros para exponentes distintos al 2. Esta ecuación, que tiene su origen en el teorema de Pitágoras, solo acepta tripletes de cuadrados perfectos –para una gran cantidad de casos– cuando $n = 2$. Los tripletes *(3, 4, 5)*, *(5, 12, 13)* y *(99, 4900, 4901)* son casos paradigmáticos de solución a la ecuación pitagórica.[4] Fermat, afirmó, en el siglo XVII, que para $n > 2$ no existen soluciones, es decir, no hay tripletes de cubos perfectos, ni de exponentes mayores. Lo sorprendente de la afirmación de Fermat radicaba en la absoluta convicción de que tal ecuación no tenía soluciones para exponentes de grado mayor que dos. Era imposible que Fermat realizara una inducción simple completa para confirmar tal afirmación, entonces, lo único que podía brindarle tal seguridad era una demostración que permitiera garantizar su grado de certeza. Pero aun cuando Fermat afirmó contar con ella, lo cierto es que jamás la dio a conocer y así, la afirmación de que "$x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones para $n > 2$" pasó a ser el enigma más grande de las matemáticas hasta la demostración de Wiles.

La demostración de Wiles, responde a los cánones tradicionales exigidos por la comunidad científica de matemáticos. Toda la matemática que utilizó en el proceso de la prueba fue sometida a un riguroso análisis crítico y a un seguimiento lógico exhaustivo

3 Ludwig Wittgenstein. *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*, Madrid: Alianza, 1978, § 39.

4 Cfr. Simon Singh, *op. cit.*, p. 59 y ss.

de cada una de las líneas del razonamiento. El teorema era producto del proceso de demostración.

El programa de Hilbert

En gran parte de la historia de las matemáticas, los matemáticos usaron la demostración como *el* método por excelencia para justificar sus enunciados y acrecentar conocimiento, período en el que se alternaron resonantes éxitos con no pocos fracasos. Sin embargo, la acumulación de *verdades* dejó los fracasos en un segundo plano y alentó, de manera fructífera, el desarrollo y crecimiento de estas disciplinas. Pero, además, sus resultados promovieron el surgimiento de muchas disciplinas y proveyeron de rigor a otras tantas. Consecuentemente, las exigencias de los matemáticos para aceptar conocimiento debían estar precedidas por la pureza y el rigor de las demostraciones absolutas. En la mayoría de los casos, el estado de cosas era ese; es decir que los teoremas y verdades matemáticas eran producto de demostraciones rigurosamente lógicas. No obstante ello, no todas las verdades que los matemáticos consideraban como tales, gozaban de semejante estatus epistemológico brindado por la demostración y, en algunos casos, no existía la certeza necesaria de que eran el producto de este método de justificación. Esta discusión –de aristas cartesianas– con el propósito de encontrar nociones básicas en matemáticas, se remonta a la segunda mitad del siglo XIX.[5]

El gran matemático de Königsberg, David Hilbert, a principios del siglo XX llevó adelante un programa cuyo propósito era, precisamente, intentar probar todas las verdades matemáticas a partir de un número mínimo de axiomas. En el verano parisino de 1900, Hilbert dio una conferencia durante el *Congreso Internacional de Matemáticas* en la cual planteó 23 problemas, cuya búsqueda de solución debían marcar las direcciones de las investigaciones matemáticas y suministrar un programa a gran escala. Gottlob Frege era, para ese entonces, uno de los lógicos matemáticos que más se había tomado en serio la propuesta de Hilbert. Durante muchos años se había dedicado a deducir enunciados matemáticos de simples axiomas. Uno de sus principales logros fue la definición de *número* a partir de la teoría lógica de conjuntos. Sin embargo, el esfuerzo de Frege tuvo un desafortunado final. Bertrand Russell descubrió que *Grundgesetze der Arithmetik* (*Leyes*

---

5 Guillermo Martínez y Gustavo Piñeiro. *Gödel ∀.* Buenos Aires: Páprika, 2009, pp. 55 y 56.

fundamentales de la aritmética), la obra en la que Frege había depositado tantas esperanzas para contribuir al programa de Hilbert, contenía una contradicción insalvable.

La historia de la "Paradoja de Russell" –nombre con el cual se hizo ampliamente reconocida entre los lógicos y matemáticos de todo el mundo la inconsistencia de *Grundgesetze*– conlleva una riqueza epistémica mayúscula. Por un lado pudo advertirse, a partir de ella, que las matemáticas podrían albergar inconsistencias en sus mismos fundamentos y, por otro, que la lógica no estaba exenta de correr con la misma suerte. Sin duda alguna, el esfuerzo monumental de Frege no fue en vano. De algún modo contribuyó al desarrollo de teorías de conjuntos más sofisticadas. Russell, por su lado, fue uno de los más fervientes impulsores que intentaron subsanar la inconsistencia que surgía de fundamentar las matemáticas a partir de la teoría de conjuntos, hoy conocida como "teoría ingenua de conjuntos". Las investigaciones de Russell sobre los fundamentos de las matemáticas se sucedieron durante los siguientes ocho años. El resultado fue los tres tomos de *Pricipia Mathematica* (1910 a 1913) en colaboración con el matemático Alfred Whitehead. La obra más emblemática y compleja de Russell contribuyó a que las matemáticas vivieran un largo período sin sobresaltos, al resguardo de una lógica consistente que le marcaba el rumbo de las futuras investigaciones y le proporcionaba el rigor necesario de fundamentos firmes. Existía una fuerte creencia de que el programa de Hilbert estaba destinado a cumplirse y que era posible un sistema matemático lógicamente consistente y deductivamente completo. Había confianza en que la fertilidad de los axiomas fuera tal que pudieran deducirse todas las verdades matemáticas de un conjunto finito de ellos y de un número, también muy reducido, de reglas de inferencia. Sin embargo, las matemáticas estaban destinadas a que no todo fuera como lo exigía Hilbert, o como lo pensaban la mayoría de los matemáticos.

La aspiración, el deseo y la exigencia de completud o completitud en las matemáticas y la lógica ha sido uno de los mayores anhelos de lógicos y matemáticos. Muchos son los casos en los que *verdadero* se identifica con *demostrable*. Más aún, son tantos que la creencia generalizada de que esto es siempre así no sólo alcanza a los que miran desde afuera los logros de estas ciencias formales sino también a aquellos investigadores que, desde adentro, más se preocupan por el desarrollo y descubrimiento o invención –ya sea uno un rezagado platónico o un innovador artista– de nuevas áreas de conocimiento, que por las cuestiones propias de la filosofía de estas disciplinas.

Wittgenstein fue uno de los que siempre creyó que verdadero y demostrable iban de la mano: *Si digo "Se" en matemáticas, la justificación de ello es una prueba.*[6]

Pero la completud, no ya de sistemas aislados, sino de "las matemáticas", dejó de ser un ideal para convertirse en una utopía. La prueba de que hay enunciados verdaderos pero no demostrables en ciertos sistemas de matemática elemental iba a significar el fin de las pretensiones del programa de Hilbert.

La disociación de "verdadero" y "demostrable"

Las diferentes concepciones de "lo verdadero" que los filósofos y científicos han acuñado durante tantos años no necesariamente coinciden con lo demostrable. Las verdades demostradas, a diferencia de otros conocimientos de la ciencia, eran indiferentes a los contextos históricos y los aspectos subjetivos; esta idea se conservó hasta entrado el siglo XX. Es decir, se pensaba que cualquier verdad matemática podía obtenerse a través del método axiomático euclídeo.[7] Sin embargo, en 1931, el joven matemático Kurt Gödel, de 25 años de edad, publicó un libro titulado *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* (Sobre las proposiciones formalmente indecidibles de *Principia Mathematica* y sistemas relacionados) que contenía teoremas que terminarían con el sueño de tantos lógicos y matemáticos que se vieron involucrados, en mayor o menor medida, en el ambicioso programa que lideraba Hilbert.

La formulación general del teorema de incompletitud de Gödel dice lo siguiente: Todo sistema axiomático recursivo y consistente que contenga suficiente aritmética tiene enunciados indecidibles, esto es, un enunciado $\boldsymbol{G}$ (numero Gödel) tal que ni $\boldsymbol{G}$ ni $\sim \boldsymbol{G}$ son demostrables. La "consistencia" misma, en cuanto concepto sintáctico, no es demostrable dentro del sistema. No obstante, el teorema –en la versión semántica– no excluye la posibilidad de que enunciados verdaderos puedan ser demostrados fuera del sistema. Gödel, en principio, se refirió a la aritmética elemental, pero aclaró que esta particularidad podía extenderse a otros sistemas formales. Lo fundamental, en lo que respecta a la demostración, es el hecho de que pudo probarse que verdadero y demostrable podían coexistir en un sistema de manera independiente. De forma resumida, si $\boldsymbol{y}$ es

---

6 Ludwig Wittgenstein. *Sobre la Certeza*: Ed. Bilingüe, Barcelona: Gedisa, 2003, § 563.

7 Cfr. Guillermo Martínez y Gustavo Piñeiro, *op. cit.*, p. 29 y ss.

el código de una fórmula de un sistema formal, y x es el código de una demostración de una fórmula y, entonces la expresión $\sim\exists x\,(x\,\mathbf{Dem}\,y)$ dice que no existe un código x que sea la demostración de una fórmula de código y. O dicho de otro modo más llano: no existe una demostración de la fórmula de código y. La genial idea de Gödel fue haber podido representar la expresión en un código llamado Número Gödel y, además, haciendo uso de la función diagonal, –también llamado método de auto referencialidad– que dicha expresión, figurativamente, diga "yo no soy demostrable".[8]

La complejidad que entrañan las demostraciones tanto semánticas como sintácticas del teorema de Gödel exceden largamente los propósitos de este artículo. Sin embargo, repito, lo relevante es que Gödel pudo determinar que, también en las matemáticas, existen limitaciones a las potencialidades del formalismo. Es pertinente aclarar que hay sistemas en donde puede darse una axiomatización completa de la clase de enunciados verdaderos y, entonces, puede demostrarse tanto la completitud como la incompletitud en cuanto características inherente a los sistemas matemáticos y lógicos. El cálculo de predicado de primer orden –que absorbe el sistema clásico proposicional– es un ejemplo de axiomática completa, así como también lo son las teorías matemáticas en las que puedan definirse los números naturales con las operaciones de suma y multiplicación.[9]

La incompletitud intrínseca a ciertos sistemas formales causó más revuelos en ámbitos alejados a las matemáticas que en el seno de las mismas. Pensadores provenientes de la política, el psicoanálisis, la filosofía y la semiótica –entre los casos más resonantes– intentaron extrapolar los resultados de los teoremas de Gödel con dudosa rigurosidad. Por el lado de los matemáticos, las repercusiones fueron más atenuadas. Simplemente se convencieron de que el programa de Hilbert era inviable, aunque había mucho más por hacer que seguir *lamentándose sobre la leche derramada.* Así, en matemática pura se siguió intentando demostrar conjeturas y buscar nuevos fundamentos, cuyo objetivo primordial fuera la unificación de las matemáticas. En tal sentido, la demostración de Wiles, en el marco de la matemática pura, contribuyó a la unificación de todos los adelantos realizados sobre teoría de los números. Esto se debió, en gran parte, a la resolución de la conjetura de Taniyama-Shimura, la que aportó un impulso inimaginable al

[8] Cfr. *Ibíd.*, p. 141 y ss.

[9] *Ibíd.*, p. 41.

proyecto de unificación de Robert Langlands. Nuevamente, el método de demostración ortodoxo volvía a estar en los primeros planos del mundo de las matemáticas.

Otros sentidos del término "demostración" en el campo de las matemáticas

Si se intenta una expresión formal respecto a las definiciones vertidas sobre la demostración matemática, la misma podría expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ . \\ . \\ . \\ p_n \end{array}$$

en donde se supone que $n > 0$ y en la que cada una de las líneas es o bien un axioma del sistema, o bien una consecuencia lógica de enunciados precedentes por aplicación de reglas lógicas predeterminadas (regla de separación o *modus ponens*, regla de sustitución y generalización). La última línea de la sucesión finita p_n es el teorema a demostrar.

Esta forma de concebir la demostración formal como método exclusivo de las matemáticas es llamada también *teoría euclídea*, en honor al gran matemático Euclides, primer director del Departamento de matemáticas de Alejandría (aprox. año 300 a.C.) y autor de *Los Elementos* que, según afirman, es el libro de texto más exitoso de la historia.[10] El legado más importante de Euclides es haber organizado sistemáticamente los conocimientos matemáticos y de geometría conocidos hasta entonces y establecer con rigor el método axiomático, que sigue siendo el modelo por excelencia de matemáticos y lógicos. Sin embargo, para muchos matemáticos y epistemólogos del siglo XIX y XX esta concepción –a la que he venido considerando casi de manera exclusiva hasta ahora– es

[10] Cfr. Simon Singh, *op. cit.*, p. 80 y ss.

dogmática y hasta llegó a hablarse de una "manía" por la demostración[11], en referencia al programa *euclideano*. Los otros sentidos del término demostración –que no se ajustan a los cánones exigidos por la ortodoxia matemática– surgen a partir de una idea que se alimentó de los fracasos de los programas de axiomatización en las matemáticas, su falta de fundamentos sólidos, las sospechas de inconsistencias o paradojas y la proliferación de conjeturas –que carecen de resolución absoluta– como, por ejemplo, el algoritmo de Euler que es un método de gran precisión, pero a partir de sucesivas *aproximaciones* a la conjetura de Goldbach.[12]

Pasada la segunda mitad del siglo XX, uno de los epistemólogos y filósofos de las ciencias que más hizo hincapié en el análisis crítico de las demostraciones de tipo euclídeas fue Imre Lakatos. Lakatos, que defiende una posición falibilista de las matemáticas en contra del purismo ortodoxo euclídeo, sostiene que son el empirismo y la inducción[13] los que caracterizan el conocimiento en este campo del saber. Esto permite el desarrollo de teorías más dignas desde una perspectiva cognitiva.[14] En *¿Qué es lo que prueba una prueba matemática?*[15] Lakatos clasifica las pruebas matemáticas en formales e informales. Una prueba formal es aquello sobre lo que hemos venido hablando hasta ahora, esto es, una secuencia finita de fórmulas de un sistema formal. Su característica fundamental es poder afirmar, de manera mecánica, si esa secuencia es una prueba o no lo es. Respecto a las pruebas informales se ha dicho errónea y equívocamente, según Lakatos, que son una prueba formal que omite especificar las reglas lógicas utilizadas para justificar el paso de una línea de la secuencia deductiva a la siguiente: *Tal vez,* dice Lakatos, *pueda llamársela una prueba cuasi-formal o una 'prueba formal con brechas', pero sugerir que una prueba informal es exactamente una prueba formal incompleta me parece que es cometer el mismo error que*

---

11 Imre Lakatos. *Matemáticas, ciencia y epistemología*, Madrid: Alianza, 1981, p. 20, cita 7.

12 La conjetura de Goldbach dice que cualquier número par mayor que dos puede reescribirse como la suma de dos números primos. Su probabilidad es aproximadamente de 0,9999, aunque no ofrece conocimiento absoluto.

13 Lakatos, cuando habla de inducción, no se refiere al método de inducción completa de los matemáticos, sino al proceso de retransmisión de falsedad, desde enunciados básicos hasta el conjunto de axiomas.

14 Imre Lakatos. *op. cit.*, p. 42 y ss.

15 *Ibíd.*, p. 91 y ss.

cometían los primeros pedagogos cuando, al suponer que un niño sólo era un hombre hecho y derecho en miniatura, descuidaron el estudio directo de la conducta del niño a favor de un teorizar basado en la simple analogía con el comportamiento del adulto[16]. Las pruebas informales –que se dan en el ámbito de sistemas cuasi-empíricos– se caracterizan por un proceso de retroalimentación de la falsedad de los teoremas desde la base hacia arriba, hacia los axiomas. Esto significa que son de carácter conjetural, en el sentido popperiano del término. Buscan hipótesis imaginativas con gran potencia explicativa y heurística. Parten de problemas, intentan soluciones arriesgadas y se someten a severos tests: sus falsadores potenciales. Un falsador potencial lógico para una teoría podría ser $p\ .\ \sim p$ y, para la conjetura de Goldbach, un número no-Goldbach, es decir, un número par $n > 2$ tal que no pueda escribirse como la suma de dos números primos. Así, una prueba informal para esta conjetura consistirá en la búsqueda de falsadores heurísticos –una hipótesis rival– a través de procedimientos informáticos para alcanzar un grado de certidumbre que la convierte en más plausible y convincente. Un ejemplo de refutación en matemáticas –asistida por ordenadores– es la realizada sobre la conjetura de Fermat. Ésta afirmaba que números de la forma $(2^{2^n} + 1)$ son todos primos, basándose en la certeza de que ese era el comportamiento de la expresión para $0 \leq n \geq 4$. Un ordenador pudo verificar –ya que la búsqueda manual es imposible– que la conjetura resulta falsa para $n = 5$.[17] Otro de los ejemplos de mayor renombre, que nos brinda la matemática aplicada sobre demostraciones asistidas, es el teorema de los cuatro colores de Appel y Haken, que se basa en una apreciación realizada en 1852 por Francis Guthrie y que dice aproximadamente lo siguiente: no parece necesario más que cuatro colores para colorear cualquier mapa asignando colores diferentes a regiones colindantes. La demostración de Appel y Haken, de 1976, es interesante porque se trató de un proceso de conjeturas y refutaciones guiadas por un ordenador trabajando una cantidad de horas equivalentes a 50 días ininterrumpidos. Una autentica demostración informal –*cuasi-empírica*– y no euclideana.

Otros tipos de demostraciones usadas en las matemáticas que se ajustan a los cánones empiristas son las llamadas demostración de conocimiento cero y demostra-

16 *Ibíd.*, pp. 93 y 94.

17 Piergiorgio Odifreddi. *La matemática del siglo XX: De los conjuntos a la complejidad*, Buenos Aires: Katz, 2006, pp. 197 y 198.

ción transparente u holográfica. La primera de ellas –la demostración de conocimiento cero– guarda cierta analogía con la historia del teorema de Fermat. Este matemático, en la célebre pagina 61 de su copia de la *Aritmética* de Diofanto, dejó escrito que tenía una demostración de su teorema pero que por razones de espacio no podía expresarla. La nota marginal dice lo siguiente: *Cuius rei demostrationem mirabilem sane detexi hanc marginis exiguitas non caperet* (Tengo una demostración verdaderamente maravillosa de esta proposición pero este margen es exiguo para contenerla). En ella, el gran aficionado de las matemáticas del siglo XVII aseguraba tener una demostración de su teorema pero sin ninguna intención de hacerla conocer y menos aún publicarla. De hecho, la demostración de conocimiento cero es un procedimiento probabilístico que ofrece evidencia convincente (aunque no absoluta) de que un teorema es verdadero y que el "demostrador" conoce esta información sin que se revele nada sobre ella. El "verificador" se convence de la verdad del teorema y el demostrador la conoce, pero el primero tiene conocimiento cero de cómo sea ésta.[18] Por otro lado, la demostración transparente u holográfica consiste en hacer comprobaciones al azar sobre líneas seleccionadas de una demostración, en lugar de verificar línea por línea. Supuestamente se utiliza en casos de demostraciones muy complejas y extensas. La certeza obtenida no es absoluta pero puede llegar a ser altamente convincente ya que las líneas verificadas exitosamente son, a su vez, verdaderas demostraciones estándar.[19]

Dos rasgos a destacar se desprenden de la síntesis sobre las posiciones no euclídeas. Por un lado, el hecho de que la demostración deductiva formal no representa una vía única de justificación de los conocimientos matemáticos y, por lo tanto, podría prescindirse de ella en muchos campos de las matemáticas en lo que se considera la experimentación y la inducción como una actividad válida para justificar enunciados. Por otro lado, y en consonancia con el primer aspecto, la matemática es falible y equiparable a las demás ciencias.

Esta postura no sólo ha introducido una *forma de hablar* en matemáticas que, para muchos, pertenecía con exclusividad al campo de las ciencias fácticas y al de la argumen-

---

[18] Jesús Alcolea Banegas. "La demostración matemática: problemática actual", en *Contrastes. Revista Interdisciplinaria de Filosofía*, vol. VII, 2002, pp. 15-34, p. 21.

[19] *Ibíd.*, pp. 22.

tación y la retórica, sino también una forma de reflexionar *en* las matemáticas. En el caso del vocabulario, aparecen términos como “experiencia”, “conjeturas”, “refutaciones”, “convencer”, “persuadir”, por nombrar sólo algunos de los más figurativos. Cuando Wittgenstein decía: *No es esencial que uno persuada al otro con la demostración. Puesto que ambos pueden verla (leerla) y aceptarla*[20], estaba convencido de que en el campo de las matemáticas las demostraciones fuerzan a alguien a aceptar su conclusión dado el proceso mecánico que es guiado por reglas lógicas. Wittgenstein estaba convencido de que nada puede haber de retórico o argumentativo, nada para persuadir o convencer en una demostración. Sin embargo, desde comienzos del siglo pasado, la historia de las matemáticas ha ido soslayando esta forma de concebir los procesos argumentativos en esta disciplina, para acercarse más a los modelos metodológicos de las demás ciencias.

Conclusiones

El logicismo de Frege y Russell y el formalismo de Hilbert fueron los dos programas más importantes que intentaron una gran organización sistemática de la matemática clásica entre fines del siglo XIX y principios del XX. Y fue el fracaso de estos programas lo que permitió que fueran considerados con mayor seriedad epistémica el inductivismo y el empirismo en cuanto procesos alternativos de justificación en las matemáticas. En el plano lingüístico, el uso unívoco del término “demostración” dejó de representar el único modelo a seguir. Posteriormente Lakatos, en *Pruebas y refutaciones* y en *Matemática, ciencia y epistemología*, sistematizó la crítica e impulsó la idea de que las matemáticas, en el fondo, son una disciplina cuasi-empírica. Su riqueza se encuentra en el hecho de proponer conjeturas imaginativas y audaces, acompañadas de una gran potencia explicativa y “heurística” para luego someterlas a una crítica severa.[21] Sin embargo, esto no significó un cambio de paradigma –en el sentido kuhniano del término– en la metodología de las matemáticas. El concepto de demostración clásico no sólo sigue siendo objetivamente significativo para la comunidad de matemáticos sino que, además, ocupa un lugar epistemológico de privilegio respecto de los demás métodos de justificación de conoci-

---

[20] Ludwig Wittgenstein. *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática,* Madrid: Alianza, 1978, § 66.

[21] Imre Lakatos, *op. cit.* p. 49.

miento. De hecho, cuando Andrew Wiles pudo dar cuenta de la conjetura de Taniyama-Shimura, lo hizo con "papel y lápiz" y expresaba: *Nunca uso computadora. En este caso, como con muchos problemas de la teoría de los números, las computadoras no servirían para nada. La conjetura de Taniyama-Shimura se aplica a un número infinito de ecuaciones, y aunque una computadora podría verificar un caso individual en pocos segundos, nunca podría verificarlos a todos. Se necesitaba, en vez de eso, un argumento lógico que paso a paso explicara por qué toda ecuación elíptica tiene que ser modular.*[22] Esta transcripción del texto de Singh resume, de manera ejemplar, la mentalidad matemática ortodoxa: rigor lógico y búsqueda de lo absoluto.

En lo que respecta a las posturas cuasi-empíricas en matemáticas quisiera destacar, antes de concluir, dos aspectos. En primer lugar, reconocer que la ortodoxia euclídea es metodológicamente insuficiente y sistémicamente improbable y que parte de la matemática aplicada depende, para su desarrollo, de métodos empíricos e inductivos. Pero, en segundo lugar, este reconocimiento no justifica plenamente su equiparación con las demás ciencias. En realidad, me parece que sucede lo contrario. Las ciencias –tanto las naturales como las sociales– han buscado en las matemáticas el rigor y la certeza que intrínsecamente no poseían. Las matemáticas no sólo les brindaron la posibilidad de desarrollarse sino, además, la de organizarse sistemáticamente.

La discusión que intenté mostrar sobre la problemática de la demostración en el campo de las matemáticas no solo expresa la complejidad y riqueza filosófica del tema, sino que permite además –aunque de manera restringida– mostrar la concomitancia de ambas posturas en la actividad que llevan a cabo los matemáticos. Así, cualquier defensa dogmática que se realice sobre alguno de los modelos de interpretación, no hará más que poner en evidencia sus falencias y limitaciones. De hecho, la cognición matemática es tan compleja como cualquier otro proceso cerebral que interactúa con la cultura.[23] Las herramientas matemáticas, como la demostración –cualquiera sea el sentido que se le dé al término en contextos matemáticos– no son una excepción; son construcciones abstractas que tienen origen en actividades coherentes y que funcionan como modelos de acceso a la realidad. Sin embargo, lo más llamativo de todo es que el sentido estándar de

[22] Simon Singh, *op. cit.* p. 272.

[23] Cfr. Stanislas Dehaene. *El Cerebro Matemático*, Buenos Aires: Siglo Veintiuno, 2016, p. 22.

demostración, el euclídeo, no ha sufrido modificaciones significativas en más de dos mil quinientos años. Habría que preguntarse si esta metodología representa el modelo cognitivo de justificación por excelencia, o el menos vulnerable de las producciones humanas.

Bibliografía

Alcolea Banegas, Jesús (2002): "La demostración matemática: problemática actual", en *Contrastes. Revista Interdisciplinaria de Filosofía*, vol. VII, Málaga. pp. 15-34.

Benacerraf, Paul and Hilary Putnam (Eds.) (1964). *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. New Jersey: Pretice-Hall.

Dehaene, Stanislas (2016): *El Cerebro Matemático*. Buenos Aires: Siglo Veintiuno.

Gödel, Kurt (1981): *Obras completas*. Madrid: Alianza Editorial.

Klimovsky, Gregorio y Guillermo Boido (2005): *Las desventuras del conocimiento matemático*. Buenos Aires: AZ.

Lakatos, Imre (1978): *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Editorial.

---------- (1981): *Matemática, ciencia y epistemología*. Madrid: Alianza Universidad.

Martínez, Guillermo y Gustavo Piñeiro (2009): *Gödel ∀ (para todos)*. Buenos Aires: Seix Barral.

Odifreddi, Piergiorgio (2006): *La Matemática del Siglo XX: De los Conjuntos a la Complejidad*. Buenos Aires: Katz.

Singh, Simon (2014): *El último teorema de Fermat*. Buenos Aires: Páprika.

Wittgenstein, Ludwig (1978): *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza.

---------- (2003): *Sobre la Certeza*. Ed. Bilingüe. Barcelona: Gedisa.