LOS *PRINCIPIA MATHEMATICA* EN LA HISTORIA DE LA LÓGICA Y LA CUESTIÓN DE FUNDAMENTOS

Jorge Alfredo Roetti

Resumen

Decir cómo influyó la obra maestra de Alfred North Whitehead y Bertrand Russell, los *Principia Mathematica* (*PM*), es tarea osada. Aquí nos preguntamos cuál fue la influencia de esa obra en la historia de la lógica y en general en las cuestiones de fundamentos. Una respuesta verosímil dice que ella fue decisiva. Nos preguntamos también si la anterior y restante obra lógica de Russell no fue más decisiva que esa obra capital para el desarrollo de esas disciplinas. Esto obliga a considerar someramente los temas fundamentales de la obra de lógica y de fundamentos de Bertrand Russell.

Introducción

Apenas había comenzado mis estudios en la universidad de La Plata cuando un estudiante ya antiguo e inteligente, de quien sólo recuerdo el apellido y el aspecto general, me recomendó leer un libro con el curioso nombre de *Principia Mathematica*. Intrigado lo pedí en la biblioteca de la universidad en Plaza Rocha. Tuve así entre mis manos por primera vez el primer tomo de una obra que se publicó entre 1910 y 1913 y cuya ficha de pedidos la señalaba como libro poco leído. Intenté leerla y me enfrenté con una primera dificultad: el idioma. La escuela de entonces no era mala como la actual, pero no preparaba bien en lenguas vivas e ignoraba las lenguas clásicas. Eso me obligó a aprender lenguas tardíamente. La segunda dificultad fue la extraña notación, tan alejada de la usual escritura matemática que aprendíamos en la facultad. Llegué a creer que jamás entendería el texto. Pospuse entonces su lectura, pero me prometí regresar a él. Años después compré la edición abreviada del libro, hasta la sección 56, y finalmente pude leer lo que me interesaba.[1] Y hace pocos días volví a desempolvar ese libro tanto tiempo olvidado.

El motivo de esta reunión es conmemorar el centenario de la edición del primero de los tres volúmenes de los *Principia Mathematica* (que abreviamos *PM*), la obra maestra de dos pensadores longevos hoy un tanto olvidados, Alfred North Whitehead (1861-1947) y Bertrand Arthur William Russell (1872-1970) e intentar ponderar su influencia en la historia de la lógica y la investigación de fundamentos.

La obra fue uno de los principales monumentos –y momentos– de ese proyecto de fundamentación de la matemática que se conoció con el nombre de logicismo, pero fueron especialmente su introducción y su primera parte, dedicadas a la lógica matemática, aquellas partes que más interesaron a lógicos y filósofos.

Las tesis del logicismo

Recordemos lo que se entiende por "logicismo". Se dice habitualmente que la tesis central del logicismo postula que la matemática es sólo una lógica más complejamente desarrollada. Dicho de otro modo, que toda –o al menos una parte substancial de– la matemática es reducible a lógica formal. Esa tesis es sin embargo más matizada, pues se concibe habitualmente como constituida por dos subtesis de diferente alcance, a saber:

(1) la tesis de la *definibilidad de todos los conceptos matemáticos mediante conceptos puramente lógicos* –por ejemplo, la definibilidad de los conceptos de cardinalidad y de divisibilidad en términos lógicos, como proponen Frege y Russell entre otros– y

(2) la tesis de la *demostrabilidad de todas las tesis matemáticas por medios puramente lógicos*, lo que suponía que todos los procedimientos demostrativos de la matemática –y especialmente la "inducción completa" tradicional (es decir, finita)– se podían reducir a mera lógica.

Habitualmente estas subtesis se entienden como implicando que la notación matemática es parte de la notación lógica y que los principios y teoremas matemáti-

---

[1] Vid. Whitehead & Russell 1910-1912-1913 (primera edición), 1925-1927 (segunda edición) y 1962 (edición abreviada).

cos son un subconjunto propio de los principios y teoremas de la lógica. Bertrand Russell expresó estas tesis diciendo que el propósito del matemático logicista es "mostrar que toda la matemática pura se sigue de premisas lógicas puras y usa conceptos definibles sólo en términos lógicos."[2] Como vemos se trata de una tesis estrictamente logicista.

El programa logicista prescindía en general de –o no tomaba en cuenta– la geometría, lo que no era decisivo, pero además no se había logrado desembarazar de algunos procedimientos impredicativos, como habían denunciado personajes tan importantes como Poincaré. Este asunto fue considerado desde entonces como un problema grave sobre el que volveremos más abajo.

Antecedentes de las mencionadas tesis logicistas aparecieron ya en la obra de Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716). Luego de un par de siglos y de la obra de autores como Ernst Schröder[3] (1841-1902), quien inició la lógica algebraica e inventó el término lógica matemática, Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) y su reconstrucción de los números reales por el método de cortaduras, y de Giuseppe Peano (1858-1932) con su intento de reconstrucción de toda la matemática, fue Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925) quien presentó el hasta entonces más exitoso programa de reconstrucción logicista de la matemática.

Pero ¿de dónde venía la necesidad de síntesis tan abarcativas, sea de la tradición logicista o de otras tradiciones? Estos desarrollos se tornaron urgentes e incluso necesarios para la matemática por las dificultades, paradojas e incluso inconsistencias que se habían acumulado en ella, especialmente luego del desarrollo del análisis infinitesimal, pero también de las geometrías no euclidianas y sus generalizaciones, el álgebra vectorial y sus modelos, y el álgebra y análisis de variable compleja y su modelización.

En la primera mitad del siglo XIX matemáticos como Bernard Bolzano (1781-1848), Niels Henrik Abel (1802-1829), Louis Cauchy (1789-1857) y Karl Theodor

---

2 Russell 1959, 74: "*to show that all pure mathematics follows from purely logical premises and uses only concepts definable in logical terms*".

3 La obra monumental de Schröder fue *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*Lecciones sobre álgebra de la lógica*), en tres volúmenes, donde se sistematizaron varios sistemas de lógica formal y se preparó el camino de la lógica matemática del siglo XX.

Weierstrass (1815-1897) habían logrado eliminar muchas imprecisiones y paradojas de la matemática de su tiempo. Por su parte el matemático irlandés William Rowan Hamilton (1805-1865) tuvo éxito al introducir pares ordenados de números reales en una estructura peculiar de cuerpo algebraico, lo que le permitió representar los números complejos de una forma intuitivamente satisfactoria. Con esto se había encontrado una solución verosímil a un capítulo de su espinoso problema de interpretación. De manera semejante los mencionados Weierstrass, Dedekind y Georg Cantor (1845-1918) desarrollaron métodos para reducir los números irracionales a sucesiones convergentes de racionales, tarea preludiada por Cauchy y Weierstrass. Fue Peano por su parte quien tuvo éxito en presentar una teoría de los racionales basado en una axiomatización de los números naturales, que aún hoy es famosa. A partir de ella fue posible reconstruir el análisis infinitesimal real y complejo, que es la principal base matemática de las ciencias naturales hasta el presente.

Algunas dificultades

Las tesis del logicismo eran verosímiles a comienzos del siglo XX y parecían prometer una fundamentación más confiable de la matemática, dado que las demostraciones lógicas parecían ser más simples y controlables que las de la matemática. Hasta ese momento los límites de las formalizaciones lógicas y matemáticas no eran siquiera conjeturables: la axiomatización de las teorías recién comenzaba, tanto más la metateoría. El talante logicista era compartido por Whitehead y Russell cuando comenzaron a colaborar en lo que finalmente resultarían ser sus *Principia Mathematica*. Ellos advirtieron que los trabajos de ambos, que se habían desarrollado hasta entonces independientemente, tenían temas próximos y concordantes, por lo que decidieron colaborar. En esa tarea Russell se dedicó más a los temas considerados filosóficos y Whitehead más a los problemas matemáticos en sus aspectos más técnicos. Por eso tenemos de la pluma de Russell la introducción y la primera parte con la teoría de los tipos y la de las descripciones definidas, que son las partes consideradas como más filosóficas de la obra. Los autores se distribuyeron la redacción de los borradores, que una vez terminados eran enviados al otro autor para su lectura y corrección, la que muchas veces era importante. El texto corregido volvía finalmente a su autor inicial para obtener la versión final. Por eso se puede decir que los tres volúmenes son la obra conjunta de ambos autores.

Los *Principia Mathematica* lograron deducir gran parte de los teoremas de teoría de conjuntos, de la aritmética finita y transfinita, del análisis infinitesimal y de la teoría elemental de la medida, pero al precio de usar dos axiomas de dudoso carácter lógico: el axioma de infinitud y el axioma de reducibilidad.

El primero de ellos afirmaba que existía un número infinito de objetos, pero una afirmación de tal especie se considera habitualmente un enunciado empírico o matemático, pero no lógico. Podemos expresarlo del siguiente modo:

Axioma de infinito: Existe una relación binaria R sobre los individuos del tipo más bajo que es irreflexiva, transitiva y fuertemente conexa, es decir: $\bigwedge x \bigwedge y(x \neq y \rightarrow xRy \vee yRx)$.

Es un axioma que afirma la existencia de la relación R con orden total sobre el dominio (= codominio) de los individuos del tipo más bajo. Si 0 es del tipo más bajo, R será de tipo tres. Si este enunciado es verdadero, entonces el codominio –y el dominio– de R deberían ser infinitos, lo que obligaría a admitir la existencia de un conjunto infinito. Si las relaciones se definen en términos de pares ordenados, se requerirá previamente la definición de par ordenado, como lo hiciera Kuratowski.

La definición, que parece hablar sólo de una relación, parece de naturaleza puramente lógica, como corresponde al logicismo. Sin embargo, menciona los individuos del tipo más bajo e induce sobre ellos el "tipo de orden" que corresponde al dominio ordinal, por lo que parece tener un contenido matemático irreductible a la lógica, reduciendo así la pretensión de definibilidad de la matemática en la lógica que requiere el logicismo.

En cuanto al axioma de reducibilidad, que aparece en el capítulo II de la introducción, párrafos VI y VII, y en la sección B, *12, de la primera parte, se dice que fue introducido para superar las dificultades de la teoría de los tipos que Russell y Whitehead habían usado para restringir la noción de fórmula bien formada y así no cometer antinomias. Stephen Cole Kleene describe la teoría ramificada de los tipos de la siguiente manera:

"A los objetos primarios o individuos (e.d. las cosas dadas que no son sujetos de análisis lógico) se les asigna un tipo (digamos *tipo* 0), a las propiedades de individuos el *tipo* 1, a las propiedades de propiedades de individuos el *tipo* 2, etc.; y no se admiten propiedades que no caigan en algunos de esos tipos lógicos (e.d. esto deja a las propiedades 'predicable' e 'impredicable' … fuera de los límites de la lógica). Una exposición más detallada describiría los tipos admitidos para otros objetos tales como relaciones y clases. Entonces, para impedir definiciones impredicativas dentro de un tipo, los tipos por arriba del tipo 0 se separan adicionalmente en órdenes. Así, para el tipo 1, las propiedades definidas sin mencionar ninguna totalidad (todos, algunos) pertenecen al *orden* 0, y las propiedades definidas usando la totalidad de las propiedades de un orden dado pertenecen al orden siguiente mayor.... Pero esta separación en órdenes torna imposible construir el análisis familiar, que hemos visto arriba que contiene definiciones impredicativas."

Para escapar a este resultado, Russell postuló su:

Axioma de reducibilidad: Para cualquier propiedad que pertenezca a un orden por encima del más bajo, existe una propiedad coextensa (e.d. *una que es poseída por exactamente los mismos objetos*) de orden 0.

"Si se considera que sólo existen propiedades definibles, entonces el axioma significa que para cada definición impredicativa dentro de un tipo dado existe una predicativa."[4]

En 1910 Whitehead y Russell en *PM* ampliaron el axioma con la noción de 'matriz', una especificación totalmente extensional de una función. Una función (predicativa) podía ser derivada de su matriz por un proceso de "generalización" y viceversa, e.d. los dos procesos son reversibles - (i) generalización de una matriz a una función (mediante variables aparentes) y (ii) el proceso inverso de reducción del tipo por sustitución de la variable aparente por cada uno de los argumentos de su dominio de definición. De este modo se evitaría la impredicatividad.

Kleene concluye su crítica recordando a Weyl 1946 cuando dice que "el sistema de los *Principia Mathematica* [se funda en] una suerte de paraíso del lógico …" y cualquiera "que está dispuesto a creer en este 'mundo trascendental' también podría aceptar la teoría axiomática de conjuntos (Zermelo, Fraenkel, etc.), que tiene la ven-

[4] Kleene 1952, p. 44-45.

taja de ser de estructura más simple para la deducción de la matemática."[5]

Nuestros autores fueron conscientes de la dificultad. Desde el comienzo advirtieron que el axioma era difícil de aceptar. Así, al comienzo del párrafo VII, titulado "Razones para aceptar el axioma de reducibilidad", se nos dice: "Que el axioma de reducibilidad sea auto-evidente es una proposición que difícilmente se puede sostener. Pero de hecho la auto-evidencia nunca es más que una parte de la razón para aceptar un axioma y nunca es indispensable."[6] Aquí comienza una justificación con un regusto a retórica forzada que continúa argumentando: "La razón para aceptar un axioma, como para aceptar cualquier otra proposición, es siempre ampliamente inductiva, a saber, que muchas proposiciones que son poco menos que indudables se pueden deducir de él, y que no se conoce una vía igualmente plausible por la cual estas proposiciones pudieran ser verdaderas si el axioma fuese falso, y nada que sea probablemente falso que pueda ser deducido de él."[7] Es fácil considerar entonces que se trata de un axioma *ad hoc*, con lo que la cuestión de la defendibilidad de la tesis logicista permaneció abierta.

Esas tesis no eran universalmente admitidas ni entonces ni ahora, por ejemplo por autores como Kronecker y Poincaré. Jules Henri Poincaré (1854-1912) ya había criticado duramente los esfuerzos de Cesare Burali-Forti (1861-1931), Whitehead y Russell de reducir la inducción completa a mera lógica, por ejemplo en libros tan antiguos como *La Science et l'Hypothèse* de 1902 (Primera parte, capítulo I: "Sobre la naturaleza del razonamiento matemático") y *Science et Méthode* de 1908 (Libro segundo, capítulo V: "Los últimos esfuerzos de los logicistas"). Allí Poincaré comenzaba

---

[5] Cf. Kleene 1952, ibidem: "the system of *Principia Mathematica*... [is founded on] a sort of logician's paradise..." and anyone "who is ready to believe in this 'transcendental world' could also accept the system of axiomatic set theory (Zermelo, Fraenkel, etc), which, for the deduction of mathematics, has the advantage of being simpler in structure."

[6] Whitehead & Russell 1910, Introduction, Chapter II, VII: "*That the axiom of reducibility is self-evident is a proposition which can hardly be mantained. But in fact self-evidence is never more than a part of the reason for accepting an axiom, and is never indispensable.*"

[7] Whitehead & Russell 1910, Introduction, Chapter II, VII: "*The reason for accepting an axiom, as for accepting any other proposition, is always largely inductive, namely that many propositions which are nearly indubitable can be deduced from it, and that no equally plausible way is known by which these propositions could be true if the axiom were false, and nothing which is probably false can be deduced from it.*"

preguntándose "… ¿las reglas de la logística han hecho sus pruebas de fecundidad e infalibilidad? ¿Es verdad que permiten demostrar el principio de inducción completa sin ningún llamado a la intuición?" La respuesta de Poincaré fue negativa: según él, el pensamiento de Whitehead era vicioso, conducía a antinomias y era ilegítimo. También criticaba la presunta demostración de Burali-Forti. Las conclusiones de Poincaré eran fuertes: Las definiciones cruciales de los logicistas no eran predicativas por cometer en forma enmascarada una forma de la falacia del círculo vicioso. Irónicamente concluye Poincaré: "En estas condiciones *la lógica no es más estéril, engendra la antinomia*." En consecuencia, Poincaré rechazó el axioma de infinito de Russell diciendo que "No hay infinito actual. […] Los logicistas lo han olvidado, como los cantorianos, y han vuelto a encontrar las mismas dificultades." Así, concluía proclamando la muerte del viejo logicismo y quedaba en espera de su sucesor.[8] Si Russell defendía el carácter analítico de la matemática –es decir su reducibilidad a mera lógica con sus definiciones y sus principios, a un conjunto de identidades al decir de Poincaré– este último defendía su carácter sintético –decir intuitivo y a priori. Una forma de concepción kantiana de la matemática regresaba con Poincaré, pero de esto nos ocuparemos dentro de dos años, cuando recordemos al genio de Nancy en el centenario de su muerte.

Las antinomias de Burali-Forti y de Russell

El programa logicista de Frege se proponía reconstruir completamente la aritmética sobre la base de una lógica que, para realizar esa tarea, debía contener el principio de abstracción, que era el instrumento para permitir desarrollar una considerablemente vasta teoría de conjuntos. A partir de la lógica en sentido estricto, más dicho principio, debía ser posible reconstruir la aritmética y, a partir de ella, los más importantes capítulos de la matemática. En esos tiempos de Frege muchos admitían que al menos una gran parte de la matemática se podía derivar a partir de un pequeño conjunto de nociones y tesis primitivas, pero no se había aún avanzado demasiado. Ese camino es el que había recorrido Frege, que había incluso llegado mucho más lejos. Hacia el año 1879 ya había avanzado bastante en la tarea de tornar técnicamen-

---

8 Ver Poincaré 1908, II, V, XI.

te posible el proyecto logicista, en 1890 disponía de las definiciones necesarias para la reducción de la matemática a la lógica y trabajaba en las principales deducciones necesarias.

Un poco antes, en 1897, había aparecido una antinomia compleja, la de Cesare Burali-Forti (1861-1931), que dependía de nociones aritméticas como la de número ordinal. Ésta era grave, pues ponía en el banquillo de los acusados a toda la matemática construida sobre la aritmética ordinal y con ello a toda la ciencia que la utilizaba como fundamento, que era casi toda la ciencia.[9] Sin embargo, el proyecto fregeano se desarrollaba hasta ese momento sin dificultades. Fue entonces cuando todo su esfuerzo sufrió una fuerte conmoción.

Apareció la llamada antinomia de Russell, que destruía no sólo la obra de Frege, sino la totalidad de la producción científica del mundo, pues deducía una antinomia en el seno de la lógica clásica y por lo tanto permitía deducir cualquier fórmula bien formada. La lógica, toda la ciencia y todo discurso razonable se tornaban triviales, pues toda proposición era deducible. Además, y desde un punto de vista didáctico, la comprensión de la antinomia de Russell era muy simple, pues para ello bastaba comprender nociones elementales de la teoría de conjuntos.

Todo esto sucedió de la siguiente manera: en la primavera de 1901 el joven Bertrand Russell descubrió que la quinta regla de la axiomatización de Frege para la lógica ampliada tornaba inconsistente al sistema. Esa regla decía que dos conjuntos

[9] Cesare Burali-Forti, que era entonces asistente de Giuseppe Peano, había descubierto una paradoja, mejor dicho antinomia, en 1897, al advertir que el conjunto de los ordinales, por ser bien ordenado, debía tener también su número ordinal, pero éste debía ser tanto un elemento del conjunto de todos los ordinales como un número mayor que cada uno de sus elementos. El motivo era que el conjunto Ù de todos los números ordinales tiene las mismas propiedades que un número ordinal, por lo que debería ser considerado uno de ellos. En tal caso se podría construir su sucesor Ù + 1, que es estrictamente mayor que Ù. Pero por otra parte este número ordinal debería ser elemento del conjunto Ù, pues Ù por definición contiene a todos los números ordinales. De ese modo Burali-Forti pudo llegar a las siguientes curiosas inecuaciones Ù $<$ Ù $+ 1 \leq$ Ù, que son claramente inconsistentes dentro de una aritmética ordinal "normal". La moderna teoría axiomática de conjuntos consiguió evitar la antinomia al prohibir la construcción de conjuntos con un axioma de comprensión irrestricto, con definiciones del tipo "el conjunto de todos los conjuntos que tienen la propiedad *P*", como admitían los sistemas iniciales de Frege y Cantor. Esto se pudo hacer de varias maneras.

M_1 y M_2 son iguales si y sólo si sus funciones definitorias $f_1(x)$ y $f_2(x)$ toman los mismos valores para el mismo dominio de definición, pero esto permitía que ellas fuesen tanto funciones del argumento x como funciones del argumento f. Esta ambigüedad es la que permitió a Russell construir el conjunto *R* que simultáneamente era y no era miembro de sí mismo.

Russell comunicó a Frege su descubrimiento en una carta del 16 de junio de 1902, donde le informaba de su antinomia sobre el "conjunto de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos", que hoy llamamos "conjunto R", que producía la inconsistencia de la lógica ampliada de Frege. Éste trabajaba desde hacía al menos diez años en su reconstrucción de la matemática, en la obra titulada *Fundamentos de la aritmética* (*Grundgesetze der Arithmetik*), cuyo último volumen apareció en 1903.[10] El descubrimiento de Russell fue publicado en su libro *Principles of Mathematics* del año 1903, luego de que Frege hubiese tomado conocimiento de la antinomia.[11]

Con ésta y otras antinomias casi contemporáneas el logicismo en desarrollo se tornó precario y pareció encontrarse con dificultades insuperables. Sus efectos fueron especialmente devastadores para el propio Frege, quien sufrió una grave crisis, que no fue causada totalmente por la carta de Russell, pero que ésta contribuyó a agudizar, según confesó en un epílogo a su obra recién mencionada, en el que dice que con el descubrimiento de Russell "han sido conmovidos los cimientos de su construcción".[12] Al considerar fracasada la obra de su vida Frege se retiró de la lógica, aunque dejó los fundamentos sobre los que Russell y otros continuaron el logicismo. Mucho más tarde, en 1923, ya parcialmente recuperado de la gran depresión, abandonó Frege el logicismo que había sido la obra de su vida. En el final de su vida Frege intentó reconstruir la matemática desde un punto de partida muy diferente, en el que tomaba a la geometría como teoría primitiva. Éste era un intento razonable e históricamente fundado, pues desde la antigüedad hubo intentos de fundar la aritmética en la geometría. No a la inversa, como luego pretendieron hacer muchos modernos,

---

[10] Frege 1893-1903.

[11] Ver Russell, Bertrand (1902) "*Letter to Frege*", en van Heijenoort 1967, 124-125, y Russell, Bertrand 1903, *Appendix B: The Doctrine of Types*, p. 523-528.

[12] "*die Grundlagen seines Baues erschüttert worden seien*".

desde Descartes en adelante. Según parece Frege habría abandonado definitivamente el logicismo como instrumento de construcción de la matemática luego de la desilusión de 1902, cuando inició el camino geométrico, que no pudo desarrollar en detalle: murió en 1925.

Pero volvamos al descubrimiento de Russell. Frege admitió la contradicción en su sistema y consignó el daño. Por su parte Russell, luego de su carta comenzó a escribir un apéndice para el nuevo libro que preparaba, *Principles of Mathematics*. El apéndice se tituló "*Appendix B: The Doctrine of Types*" y fue su primer intento para evitar las antinomias en la teoría de conjuntos y en la lógica, que surgían en la axiomatización de Frege. Esa fue el acta de nacimiento de la teoría de los tipos. Luego vendrían otras versiones: la versión del año 1908, ya madura, en el artículo "*Mathematical Logic as Based on the Theory of Types*" y la versión del año 1910, en el primer volumen de los *PM*.

La teoría de los tipos se presentó en dos versiones: la versión "simple" o primitiva de 1903 y la teoría de los tipos "ramificada", a partir del artículo de 1908. La suerte que corrieron no fue diversa: ambas fueron muy criticadas, tanto por ser patentemente teorías *ad hoc* para superar la antinomia de Russell, como por ser dudosamente efectivas para eliminar *toda* antinomia posible. En el párrafo VIII al final del capítulo segundo de la introducción de los *PM*[13] considera Russell las contradicciones siguientes: (1) la de Epiménides el cretense o el mentiroso, (2) la primera de Russell o antinomia del conjunto R, (3) la del propio Russell sobre las relaciones, (4) la de Burali-Forti, (5) la de Berry, (6) la de König y (7) la de Richard. Varias de ellas son vastamente conocidas. Consideremos aquí sólo las dos que Russell presenta en el texto (las restantes las tratamos en un apéndice).

(2) La antinomia del conjunto R es muy simple:

Sea *R* la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas: *R* = {*x*: *x*Ï*x*}.

Entonces, para cualquier x, x es miembro de R equivale a x no es miembro de x: $x \in R = x \notin x$.

De aquí, dando a x el valor R, tenemos R es miembro de R equivale a R no es miem-

[13] Whitehead & Russell 1962, pp. 60-65.

bro de R: $R \in R = R \notin R$.

(3) La antinomia de las relaciones tampoco es compleja:
Sea T la relación existente entre dos relaciones R y S todas las veces que R no tiene la relación R con S. Entonces, cualesquiera sean las relaciones R y S, "R tiene la relación T con S" equivale a "R no tiene la relación R con S": $RTS \leftrightarrow \neg RRS$.
Por lo tanto, dando el valor T tanto a R como a S obtenemos que "T tiene la relación T con T" equivale a "T no tiene la relación T con T": $TTT \leftrightarrow \neg TTT$.

Russell admite que las antinomias que enumera son sólo ejemplos de un número indefinido –tal vez infinito– de ellas, pero considera que todas tienen como característica común a la autorreferencia. Así, en la antinomia del conjunto R, si se dice de todas las clases que no son miembros de sí mismas que son miembros de R, esto mismo se debería decir de R, y proporcionalmente ocurre con la antinomia de las relaciones. El comentario de Russell es claro: "En cada contradicción se dice algo sobre *todos* los casos de algún tipo, y de lo que se dice parece generarse un nuevo caso que es y no es del mismo tipo, como los casos de los cuales *todo* se tratase en lo que se dijo. Pero esta es la característica de totalidades ilegítimas, como las definimos al considerar el principio del círculo vicioso. Por ello todas nuestras contradicciones son ilustraciones de falacias de círculo vicioso. Resta por mostrar, por lo tanto, que las totalidades ilegítimas consideradas son eliminadas por la jerarquía de tipos que hemos construido."[14]

Luego de esos comentarios comienza la exposición informal del modo en el que la teoría de los tipos impide la aparición de esas paradojas. Algunas de ellas tienen una compleja exposición formal, como la de Burali-Forti, cuya presentación simbólica es simple, pero cuya eliminación por la teoría de los tipos lógicos recibe un tratamiento técnico especial en la sección *256 de *PM*.

La estrategia de Russell de eliminación de antinomias es exitosa, pero presenta un defecto que parece pequeño pero no lo es: *no puede asegurar de antemano que todas las antinomias posibles sean de la especie de las falacias de círculo vicioso*. Lejos están aún las herramientas de la semiótica y su posterior simplificación de las antinomias en sin-

[14] Whitehead & Russell 1962, p. 62: "*In each contradiction... which we have constructed.*"

tácticas, semánticas y pragmáticas. De todos modos la estrategia de eliminarlas mediante reglas adecuadas de buena formación dentro de un lenguaje tendrá una larga y exitosa carrera.

Las teorías de los tipos y sus dificultades

Lo que merece un comentario adicional es el instrumento de la teoría o doctrina de los tipos. Dicha teoría era exitosa en la tarea de eliminar antinomias, pero la complicada y barroca multiplicación de entidades que producía –especialmente la teoría ramificada, pero también la simple– conspiraba contra una regla escolástica tan básica y razonable como la del principio de parsimonia (*Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*), regla que el mismo Bertrand Russell había defendido enfáticamente en 1906, cuando afirmara que la navaja de Ockham era la máxima metódica suprema ("*On the Nature of Truth*"). Su compleja arquitectura causó grandes dificultades en su uso. Todo eso dificultó mucho su aceptación, por lo que, cuando hubo sucedáneos igualmente poderosos pero más simples, fue paulatinamente evitada.

Además, la arquitectura de la teoría de los tipos ramificada era demasiado permisiva para muchos lógicos y matemáticos por sus procedimientos de aceptación de las entidades. Así, David Hilbert y los formalistas, que sólo admitían objetos finitamente construibles y bien definidos, junto a reglas de inferencia completamente efectivas, tenían serios reparos contra esas formaciones. Aún más críticos fueron Luitzen Brouwer y los intuicionistas, que no sólo compartían la idea de que no se puede admitir la existencia de objetos matemáticos para los cuales no se puede dar reglas efectivas de construcción, sino que su finitismo era más estricto que el de Hilbert.

La idea básica de la teoría de los tipos es sencilla. Para cualquier función proposicional f hay argumentos x para los cuales fx no tiene sentido, es decir, no tiene valor de verdad, no es ni verdadera ni falsa. Aquellos argumentos para los que fx tiene valor de verdad, constituyen su "dominio de significación". Así podemos determinar el dominio de significación de la función 'x es hombre', que constituye el dominio de objetos para los que tiene sentido la expresión. Pero éstos no agotan los dominios de objetos. Las funciones proposicionales son a su vez objetos de algún dominio, pero son de una índole tal que es dudoso decir si se forma una proposición cuando se reemplaza la variable x por el nombre de una función tal. Por ejemplo, las expresiones 'Alejandro es hombre' y 'Bucéfalo es hombre' tienen sentido, por lo que tanto 'Alejandro' como 'Bucéfalo' están en el dominio de significación de 'es hombre'. En cambio, es dudoso que la expresión 'es hombre es hombre' sea una proposición. Esta cuestión la resuelve Russell de manera neta: la expresión citada y todas las de la forma ff carecen de significación. La respuesta dirá que son del mismo tipo lógico, lo que significa que el argumento tiene el mismo tipo que la función. Para simplificar el tratamiento define Russell tipo lógico de la siguiente manera:

D. El "tipo" lógico es el dominio de significación de una función proposicional.[15]

De aquí se siguen consecuencias inmediatas, como que si fx, fy y gx son significativas, e.d. verdaderas o falsas, entonces también lo es gy. Es decir, dos tipos que tienen un miembro en común son idénticos, y dos tipos diferentes no tienen miembros en común: son mutuamente excluyentes.

La sintaxis de la teoría de los tipos exige que una función proposicional pueda tomar como argumentos a miembros de su tipo, pero no a miembros de algún tipo diferente. Además se estipula que una función proposicional, una relación, etc., no pertenecen a su dominio de significación, por lo que no pueden ser argumentos de sí mismas o de alguna entidad del mismo tipo. Esto origina reglas de buena formación y una estratificación de tipos lógicos, según la cual expresiones como fg sólo tienen sentido cuando g pertenece al tipo lógico de f. También es inmediato que, si fg es una expresión bien formada, entonces no lo será la expresión gf.

En consecuencia serán mal formadas todas las expresiones autorreferentes como ff, gg, $R \in R$ y $R \notin R$ (de la antinomia del conjunto de Russell), TTT y $\neg TTT$ (de la antinomia de las relaciones), etc. El texto de *PM* contiene explicaciones detalladas de por qué son inadmisibles las restantes antinomias mencionadas.

Por supuesto, de estos sencillos comienzos se llega a toda la complejidad de la teoría completa con sus tipos y órdenes, que es de escritura compleja y manipulación difícil. Uno de los propósitos buscados con la estratificación en tipos y la eliminación de expresiones que transgredían reglas sintácticas de buena formación, era el de im-

[15] *PM*, part one, section B, *12.

posibilitar la formación de las expresiones antinómicas como las antes mencionadas. Buena parte de la lógica contenida en los *PM* intentó mostrar la eficiencia de la teoría de los tipos en eliminar las antinomias originadas en la trasgresión de la sintaxis de la teoría de los tipos.

Sin embargo, si nos preguntamos si la teoría de los tipos de Russell satisface los objetivos para la que fue diseñada, la respuesta no es del todo satisfactoria. Su objetivo inmediato era el de eliminar las antinomias que habían surgido en la reconstrucción logicista de la matemática y ese objetivo fue cumplido: las antinomias conocidas fueron eliminadas por ella. Pero el objetivo mediato –muchas veces tácito, pero obvio– era más difícil de satisfacer, pues se trataba nada menos que de eliminar toda antinomia *posible* de la reconstrucción logicista de la matemática y, antes aún, de la lógica pura. Y no resultaba claro si la teoría de los tipos podía satisfacer este objetivo de máxima. Tampoco resultaba claro que diese cuenta de los vicios de formación de algunas nuevas antinomias que pudiesen aparecer, es decir no blindaba a la lógica y la matemática ante la amenaza de aparición de nuevas antinomias de alguna especie que no fuese de la clase de círculos viciosos que la teoría de los tipos podía evitar. Esto constituía una objeción importante a la cual la teoría de los tipos no supo responder adecuadamente.

Las dudas de Russell respecto de la teoría de los tipos fueron conspicuas. Por ejemplo en su libro *Introduction to Mathematical Philosophy* de 1920 dedica todo un capítulo al axioma del infinito y de los tipos lógicos donde afirma: "ahora bien, la teoría de los tipos enfáticamente no pertenece a la parte concluida y cierta de nuestra materia: mucho de esta teoría está aún en sus comienzos, es confusa y oscura. Pero la necesidad de *alguna* doctrina de tipos es menos dudosa que la forma precisa que deba tomar la doctrina; y respecto del axioma de infinitud es particularmente fácil de ver la necesidad de una doctrina tal."[16] Las dudas de Russell fueron de tal importancia que en la segunda edición de *PM* de 1927 abandonó virtualmente el axioma de reducibi-

[16] Russell 1920, p. 135: "*Now the theory of types emphatically does not belong to the finished and certain part of our subject: much of this theory is still inchoate, confused, and obscure. But the need of some doctrine of types is less doubtful than the precise form the doctrine should take; and in connection with the axiom of infinity it is particularly easy to see the necessity of some such doctrine*."

lidad. Admitió que una función sólo puede aparecer en una matriz a través de sus valores, pero comenta en una nota al pie que "toma el lugar (no muy adecuadamente) del axioma de reducibilidad"[17]. Sin embargo, al final comprueba que de "nuestras proposiciones primitivas actuales" él no puede deducir "las relaciones de Dedekind y las relaciones de bien ordenadas" y observa que queda por descubrir si existe un nuevo axioma que reemplace al axioma de reducibilidad.[18]

Tras soluciones más simples

Contemporáneamente a la gestación de *PM* también otros lógicos o matemáticos trabajaban en la elaboración de reconstrucciones del cuerpo central de la matemática, de carácter axiomático o no, logicista o no. No bien aparecieron las primeras antinomias el trabajo se concentró en desarrollar sistemas formalizados que además de evitarlas, de ser posible, impidieran para siempre su aparición. Por eso no puede sorprender que surgieran otras doctrinas, algunas de menor complejidad que la teoría de los tipos, pero de potencia semejante. La reconstrucción intuicionista de la matemática la inició Brouwer en el año 1907, cuando presentó la forma moderna del estilo de fundamentación intuicionista.[19] En el año 1908, desde una perspectiva conjuntista, apareció la teoría de conjuntos de Ernst Zermelo 1871-1953. La reconstrucción intuicionista fue menos conspicua en esos años. En cambio, la teoría de conjuntos axiomatizada de Zermelo significó un alivio frente a la compleja escritura y la molesta multiplicación de los entes en las teorías de los tipos. El sistema axiomático conjuntista de Zermelo resolvía la antinomia de Russell y todas las restantes conocidas hasta entonces mediante restricciones en el axioma de comprensión de modo semejante al que lo hacía la teoría de los tipos, tenía una estratificación de conjuntos simple, pero su escritura era clara y simple y no presentaba el inconveniente de una excesiva multiplicación de entidades. La axiomatización de Zermelo, modificada por Abraham Fraenkel de los años 1920, se conoció como ZF y ZFC (es decir,

---

[17] Whitehead & Russell, PM, 2nd edition, 1927, Introduction, xxix: "*A function can only appear in a matrix through its values.*" y "*It takes the place (not quite adequately) of the axiom of reducibility.*"

[18] Whitehead & Russell, PM, 2nd edition, 1927, Introduction, xliv-xlv.

[19] Ver Roetti 2007.

'de Zermelo y Fraenkel' y 'de Zermelo y Fraenkel con axioma de elección') y fueron mucho más fáciles de utilizar, por lo que paulatinamente disminuyó el interés por las teorías de los tipos. Otros autores, como Leon Chwistek y Frank P. Ramsey en los años 1920 lograron dar versiones simplificadas de la teoría de los tipos que evitaban la complejidad de los órdenes pero conservaban toda la potencia expresiva y sintáctica de la teoría ramificada de Russell con axioma de reducibilidad. Se la llamó 'teoría simple de los tipos'. Contemporáneamente aparecieron otras teorías como los cálculos lambda y cálculos lambda con tipos, de Alonzo Church, diseñado este último con el propósito de evitar nuevas paradojas, como la de Kleene-Rosser. El cúmulo de teorías equivalentes ha crecido mucho en el tiempo y constituye una gran especialidad dentro de los estudios lógicos y de fundamentación. Uno de los objetivos de algunos autores consistió en buscar garantizar en estos sistemas la simplicidad expresiva junto con la potencia teórica de los cálculos.

Resumiendo, podemos decir que el siglo transcurrido desde 1910 conoció un gran número de formalizaciones de diferentes teorías de los tipos y de otras especies para expresar aspectos centrales de la matemática, como la aritmética elemental y sus desarrollos, pero el interés en las teorías de los tipos del estilo de Russell fue decayendo, sea en beneficio de nuevas teorías de los tipos con diferentes características, sea a favor de teorías de tradiciones distintas en la cuestión de fundamentos. Un caso peculiar es el del constructivismo, que se desarrolla a partir de la síntesis entre la tradición formalista y la tradición kantiana e intuicionista. Esta tradición ha intentado ser muy parsimoniosa con la proliferación de entidades y tipos, tratando de mantener más limitada la ontología matemática. Sin embargo, hay dominios en los que la teoría de los tipos de antiguo cuño, aunque en versiones diferentes, se conserva vigente. Tal es el caso de la cibernética, en la que sigue siendo importante una presentación en tipos de los lenguajes de programación. Por la importancia de la cibernética es ésta tal vez la más importante extensión contemporánea de la teoría de los tipos.

Debemos hacer un comentario respecto de Alfred Tarski y las teorías de los niveles de lenguaje. Estas teorías estratificadas comenzaron su difusión en los años 1930 y tienen una arquitectura semejante a la de la teoría de los tipos. No es posible minimizar su importancia, que fue enorme en la historia de la semántica formal y de la semiótica del siglo XX, pero lo único que queremos recordar aquí es lo provechosa que fue la distinción entre antinomias sintácticas y semánticas, a las que más tarde se agregaron las antinomias pragmáticas. Eso trajo no sólo una simplificación, sino una clarificación del análisis.

Epílogo

No obstante los defectos mencionados los *PM* fueron exitosos. Se les reconoce nada menos que el mérito de haber difundido la lógica matemática, haber popularizado una notación que perfeccionaba la de Peano y superaba las anteriores de Frege y otros, y dotaba de gran poder expresivo y sencillez a la lógica de primer orden. También se advertía que su presentación peculiar había incrementado el poder deductivo de los sistemas formales, y también que ellos habían tornado perceptible la urgencia de la solución de algunos problemas metateóricos de la lógica y la matemática –como el de la consistencia–, que luego serían objeto de exhaustivos estudios metateóricos sobre esas disciplinas. Además, la presentación de *PM* tornó evidentes algunas conexiones entre el logicismo, la metafísica y la teoría de la ciencia.

Los *PM* promovieron también la discusión de temas importantes, como los de la noción de función proposicional, de las descripciones definidas y de la teoría de los tipos –temas desarrollados por la obra de Russell–, pero también promovieron la discusión de la noción de construcción lógica y el desarrollo de la metateoría clásica, las de Kurt Gödel (1906-1978), Alonzo Church (1903-1995) y Alan Turing (1912-1954) entre otros, e inició una tradición en campos tan diversos como los de la filosofía, la matemática, la lingüística, la economía y la informática.

Pasados cien años desde la primera edición del primer volumen de los *Principia Mathematica*, nos podemos preguntar si perdura algo del proyecto fundamental de la obra. Algunos consideran que el proyecto logicista es aún admisible, aunque con modificaciones adecuadas. Autores posteriores intentaron renovar el credo logicista: no sólo los ya lejanos Carnap y Quine lo hicieron, sino autores menos conocidos como los neo-logicistas Crispin Wright y de D. Bostock, hace unos veinte años. Este último intentó una construcción logicista de la axiomática de Peano, pero mediante una lógica clásica libre de tipos. La aritmética, en la que se admiten formaciones conceptuales impredicativas, no resulta ser así una teoría de ciertos objetos, sino una teoría de los cuantores numéricos ‘hay al menos *m A*’ y ‘hay al menos *n* B’, donde las variables conceptuales '*A*' y '*B*' pretenden no suponer ninguna ontología. Sin embargo, no parece que esté demostrada la no contradicción de ese sistema. Y algunos sostienen que los supuestos técnicos y filosóficos del proyecto fueron demasiado débiles y confusos como para ser de gran ayuda para la tesis logicista. De todos modos hay que contar con la posibilidad de un resurgimiento logicista, aunque con un límite: parece imposible un logicismo puro, es decir, uno que no contenga al menos un axioma o una regla de construcción con contenido aritmético difícilmente caracterizable como lógico puro, como ocurría con el axioma de infinitud.

No obstante las dificultades de las teorías de tipos al estilo de Russell para dar cuenta de la arquitectura de la matemática, hay que recordar sin embargo que esas mismas dificultades y su comparación con las estrategias de otras tradiciones mencionadas, ayudaron a lógicos y matemáticos a desarrollar su comprensión de la naturaleza de los sistemas formales y de sus resultados a lo largo del siglo XX y hasta la fecha. Un objetivo central de todas las reconstrucciones de la lógica y de la matemática que se había tornado urgente tras la aparición de las antinomias y los intentos logicistas, intuicionistas y formalistas, era demostrar la consistencia de esas doctrinas fundamentales. La consistencia de la lógica de primer orden, elaborada dentro de la escuela de Hilbert, se demostró recién en 1927. Y la consistencia de la aritmética de Peano con inducción tuvo su primera versión, aún problemática, en el año 1936. Esta última fue la gran obra de Gerhard Gentzen, cuya versión definitiva data de comienzos de la década de los años 1940. Sin embargo se debió esperar algunos años más para disponer de demostraciones de consistencia de la aritmética de Peano con inducción finita que soportaran los estándares más exigentes.

Hoy la situación es en muchos aspectos satisfactoria. Desde la antigüedad la lógica y la matemática se encuentran entre las doctrinas fundamentales de toda cultura científica. Sin embargo nunca habíamos tenido una demostración de la consistencia de esas teorías hasta el siglo XX. Hoy podemos descansar tranquilamente en esas doctrinas, pues sus tesis están más allá de toda duda. Naturalmente hay fragmentos de teorías lógicas y matemáticas que, por su complejidad, no pueden acceder a demostraciones semejantes de consistencia, pero las doctrinas fundamentales y muchas de sus extensiones sí disponen de ellas. Hay demostraciones de otras propiedades metateóricas, aunque los teoremas de limitación nos dicen también cuáles son algunas de las barreras para las demostraciones algorítmicas de la metateoría. En este punto debemos reconocer otro de los méritos esenciales de las teorías de los tipos de Russell, en colaboración con otros desarrollos y tradiciones de fundamentación: las disputas y los diálogos entre las diferentes escuelas significaron un enorme incentivo a la investigación. Investigación que llegó paulatinamente a los resultados mencionados y al reconocimiento de sus límites, una tarea ciclópea del pensamiento que podemos considerar como uno de los mayores logros en toda la historia de la humanidad. Ahora sabemos que disponemos de una base limitada, pero cierta e inconmovible, para todo el saber científico y filosófico. Para alcanzar esos resultados no fue menor la contribución que tuvo en esa tarea la obra de Whitehead y Russell, los *Principia Mathematica*.

Bibliografía

Copi, Irving (1971): *The Theory of Logical Types*, London, Routledge and Kegan Paul.

Frege 1893-1903: Frege, Gottlob,

van Heijenoort, Jean (1967): *From Frege to Gödel,* Cambridge, Mass., Harvard University Press.

Kleene, Stephen Cole (1952): *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam-Groningen, North-Holland - P. Noordhoff, 1967.

Poincaré, Henri (1902): *La Science et l'Hypothèse*, Paris, Flammarion. La traducción española es: *La ciencia y la hipótesis*, Madrid: Espasa-Calpe, 1943.

---------- (1908): *Science et Méthode*, Paris, Flammarion, 1908. La traducción española no es recomendable: *Ciencia y método*, Madrid: Espasa-Calpe, 1944.

Roetti, Jorge Alfredo (2007): "¿Por qué recordamos a Brouwer?", en *Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires*.

Russell, Bertrand (1903): *Principles of Mathematics,* Cambridge, Cambridge University Press.

---------- (1905): "On Denoting", en *Mind,* new series, 14 (1905): 479-493; reimpreso en *Logic and Knowledge,* ed. Robert Marsh, 1956.

---------- (1908): *Mathematical logic as based on the theory of types*. Cf. van Heijenoort 1967:151.

---------- (1959): *My Philosophical Development*, London, George Allen and Unwin, and New York, Simon and Schuster, 1959.

---------- (1920): *Introduction to Mathematical Philosophy* (second edition: New York, Dover

Publishing Inc., ISBN 0-486-27724-0).

Whitehead, Alfred North & Russell, Bertrand (1910-1912-1913): *Principia Mathematica* (3 vols.), Cambridge, Cambridge at the University Press, segunda edición 1925 (vol I), 1927 (vol. III), Cambridge, Cambridge at the University Press, edición abreviada: *Principia Mathematica to * 56*, Cambridge, Cambridge at the University Press, 1962, xlvi + 410 pp.